2次元角柱まわりの渦放出流れを対象とした各種行列解法の比較

－Re数１００の２次元層流解析の場合－

松井巨光　樗木雄介

要 旨

2次元角柱まわりの渦放出流れを対象として圧力修正量のPoisson方程式の解法に各種行列解法を適用した。解析の結果以下のことが判明した。

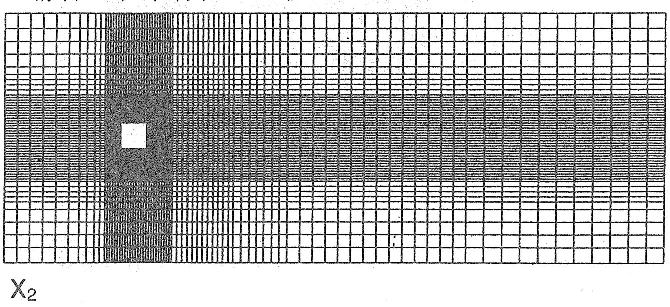
(1) HSMAC法と比べ他の解法は、必要とされるPoisson方程式の反復回数が大幅に減少する。

(2)全ての収束判定基準で、MICCG法は流れ場が変動してもポアソン方程式の反復回数が変化せず安定的な解法であった。

(3)渦放出流れではMICCG法を利用することにより、内部流れの場合と比べてより大きな計算時間の短縮が可能となる。すなわち、Poisson方程式の初期残差が大きい非定常解析ではMICCG法はHSMAC法より安定性と収束性に優れた解法である。

1．まえがき

２次元層流のCavity FlowやLESによる３次元の非等温室内気流の非定常解析について数値計算を行う際、HSMAC型のように圧力と速度を同時緩和するアルゴリズムに対し、SMAC型のアルゴリズムでPoisson方程式の算法にMICCG法[注1)]、MILUCGS法[注2)]等を用いると、Poisson方程式の反復回数が大幅に減少でき演算処理時間短縮に有効である[文1)]。本報ではRe数=100の２次元角柱まわりの渦放出流れを対象として各種Poisson方程式の算法の比較を行った。文献１で扱われている内部流れでは解析領域内において基本的に行列の形が不変なのに対し、本報で扱う流れは、解析領域内にある角柱の影響により圧力修正量のPoisson方程式に対する行列の形が局所的に変化する。また渦放出に伴い、各時刻におけるPoisson方程式の初期残差が大きい非定常解析である点でも文献１と異なる。このような流れにMICCG法、MILUCGS法、MILUCR法[注3)]とHSMAC型の圧力速度同時緩和法を用いた場合の収束特性を比較した。



X_2

X_1

図１　メッシュ分割図

2．計算概要

<u>２.１計算対象</u>　図１に計算に用いた80 (x_1) ×52 (x_2)（最小メッシュ幅は0.1, 最大メッシュ幅は0.7）の不等間隔メッシュ分割を、図２に計算領域を示す。

<u>２.２計算条件と境界条件</u>　表１に計算条件と境界条件[文2)]を示す。

<u>２.３差分スキーム</u>　空間差分は中心差分スキーム、時間差分はAdams-Bashforthスキームを使用した。

記号　X_i：i=1：主流方向、i=2：横方向
U_i：i方向の流速（i=1：主流方向、i=2：横方向）
P：圧力
D：角柱１辺の長さ　U_0：流入平均風速
諸量は、D, U_0 で無次元化

表１　計算条件・境界条件

レイノルズ数	100
時間差分間隔	0.05
流入面	$U_1=1.0$, $U_2=0.0$
解析領域側面	$U_1=1.0$, $U_2=0.0$
角柱壁面	$U_1=0.0$, $U_2=0.0$
流出面	$\partial U_1/\partial x_1=0.0$, $\partial U_2/\partial x_1=0.0$

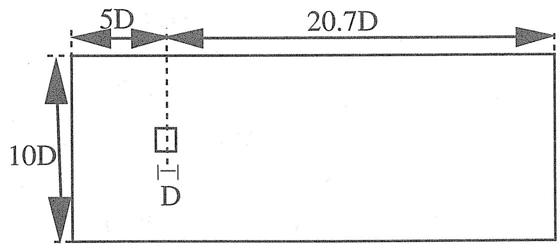


図２　計算領域

__２.４計算方法__　①SMAC(Simplified MAC)法[文3)]のアルゴリズムを使用し、圧力修正量のPoisson方程式の解法にMICCG法、MILUCGS法、MILUCR法とHSMAC法のアルゴリズムを適用したときの比較を行った。②時間ステップ毎に行う圧力修正量算出のためのポアソン方程式の反復計算は速度のDivergenceの絶対値の空間最大値が１０$^{-4}$～１０$^{-6}$となるまで続ける。③初期値は計算領域内U_1＝１，U_2＝０，Ｐ＝０とした。④初期値から無次元時間約230までについて高速性の比較を行う。時間差分間隔$\Delta t=5\times10^{-2}$。⑤無次元時間10～20までの間は角柱まわりの境界条件を左右非対象とした（一方はno-slip壁、他方はslip壁）。これは、対称性を崩しカルマン渦列を放出させるために行った。

３．計算結果と考察

圧力修正量算出のためのPoisson方程式の収束判定基準を１０$^{-6}$とした場合について以下に示す。

__３.１流れ場__　図３にMICCG法の場合の平均風速ベクトルを示す。他の解法の結果もほとんど同じである。図４にtime step1600(t=80.0)とtime step1650(t=82.5)でのMICCG法の場合の瞬間風速ベクトルを示す。カルマン渦が角柱隅から交互に発生し、風下に移動していく様子が観察される。

__３.２収束特性の比較__　図５に計算初期における速度のDivergenceの絶対値の空間最大値（以降DMAX）が１０$^{-6}$以下になるのに要したPoisson方程式の反復計算回数の時間変化を示す。ただし、HSMAC法の場合は圧力・速度同時緩和の反復回数として示す[注4)]。MICCG法、MILUCGS法は比較的少ない反復回数で安定的にDMAXが１０$^{-6}$以下になるのに対し、MILUCR法で１桁、HSMAC法では、２桁以上もの多くの反復回数を要している。図６に計算が周期的定常状態[注5)]に達しているtime step 1600以降における反復計算回数の時間変化を示す。HSMAC法は渦放出による流れ場の変動に伴い反復回数が大きく変動する。これは文献１、文献４の傾向とも一致する。MILUCR法は渦放出よりも高周波で各step毎に反復回数が大きく変動している。MILUCGS法は流れ場の変動にあまり関係なく圧倒的速さで収束している。MICCG法は反復回数がMILUCGS法より若干多いが流れ場の変動に関係なく一定の反復回数で収束しており、文献１の場合と同様に流れ場が変動する場合、MICCG法が最も計算安定性を有するPoisson 方程式の解法であると言える。図７に２つの時点でのPoisson方程式の相対残差[注6)]が１０$^{-7}$以下になるまでの収束過程を示す。計算初期のtime step100ではMICCG法、MILUCGS法は30回以下で相対残差が１０$^{-7}$以下に落ちる。これに対しMILUCR法は90回程度を要し、HSMAC法は20000回を要しても１０$^{-7}$以下に落ちなかった。一方、timestep1600のときも100step同様にMICCG法、MILUCGS法は30回程度で収束しているのに対し、MILUCR法では反復回数は100stepの場合より減少したものの40回程度を要し、

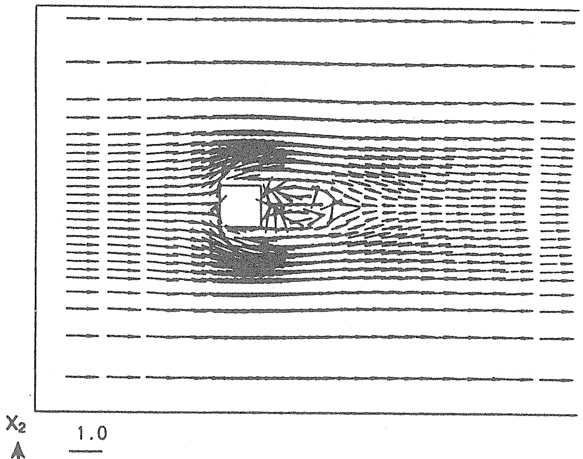


図３　平均風速ベクトル

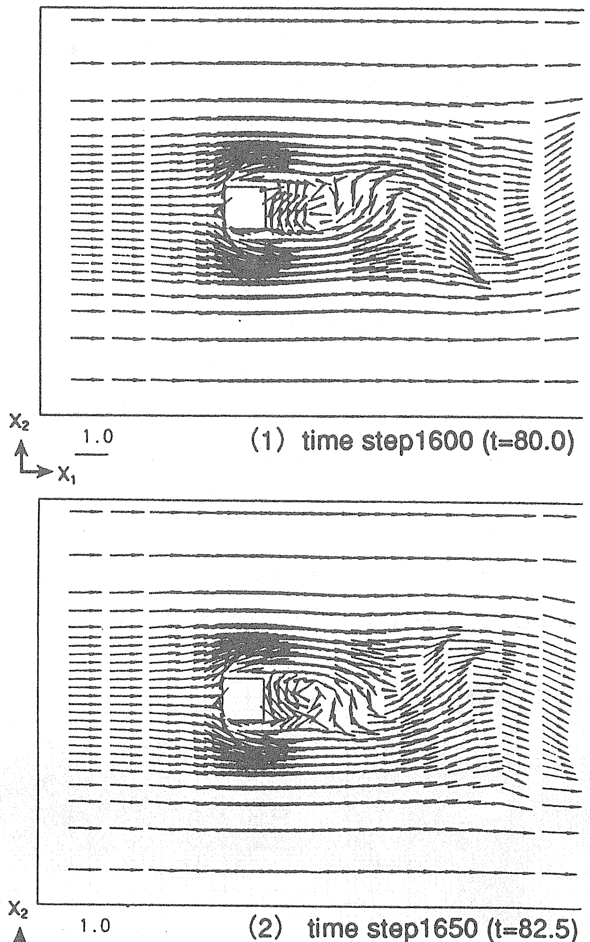


図４　風速ベクトル(瞬時値)

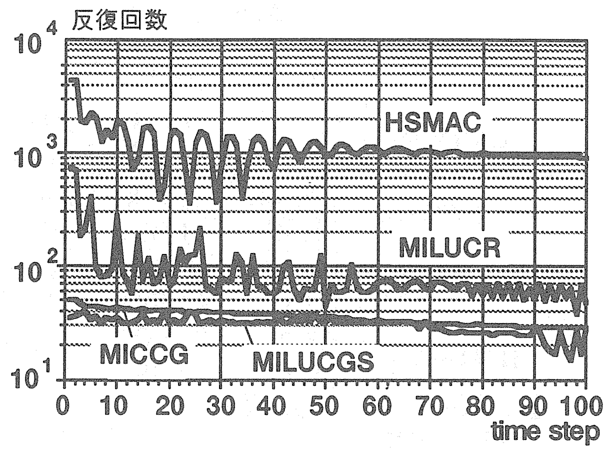


図５　Poisson方程式の反復計算回数の時間変化

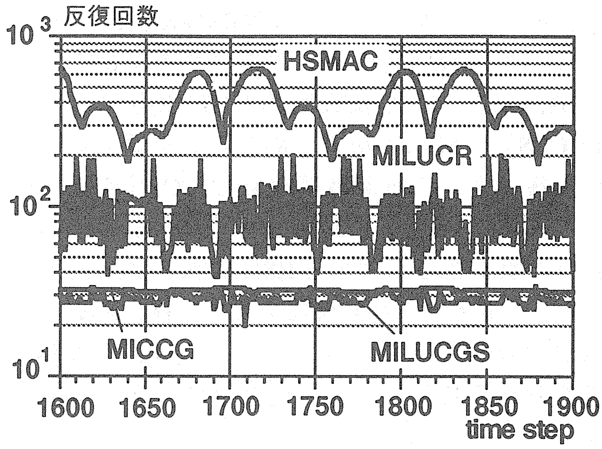


図６　Poisson方程式の反復計算回数の時間変化

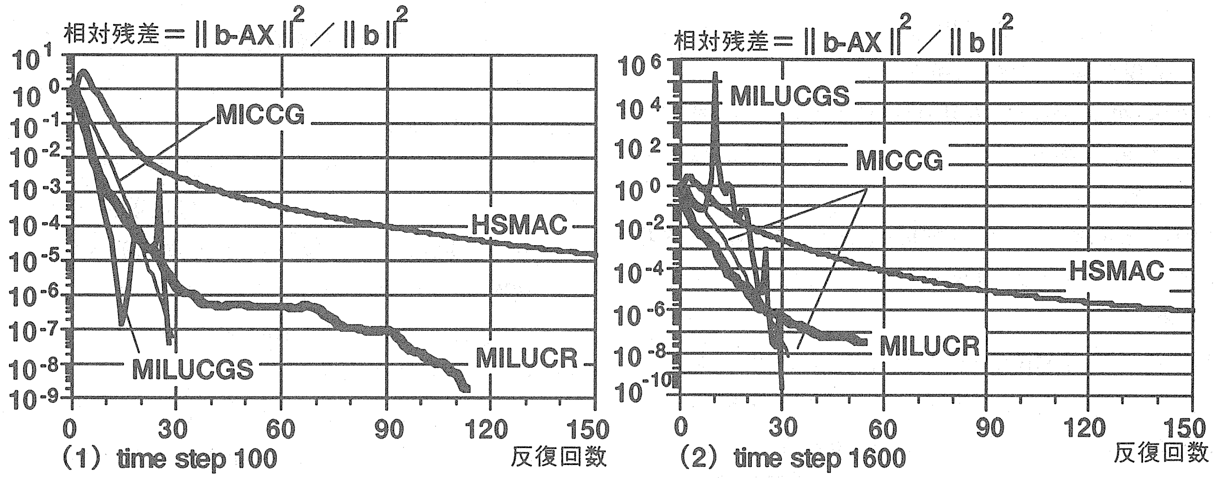


図７　反復回数と相対残差

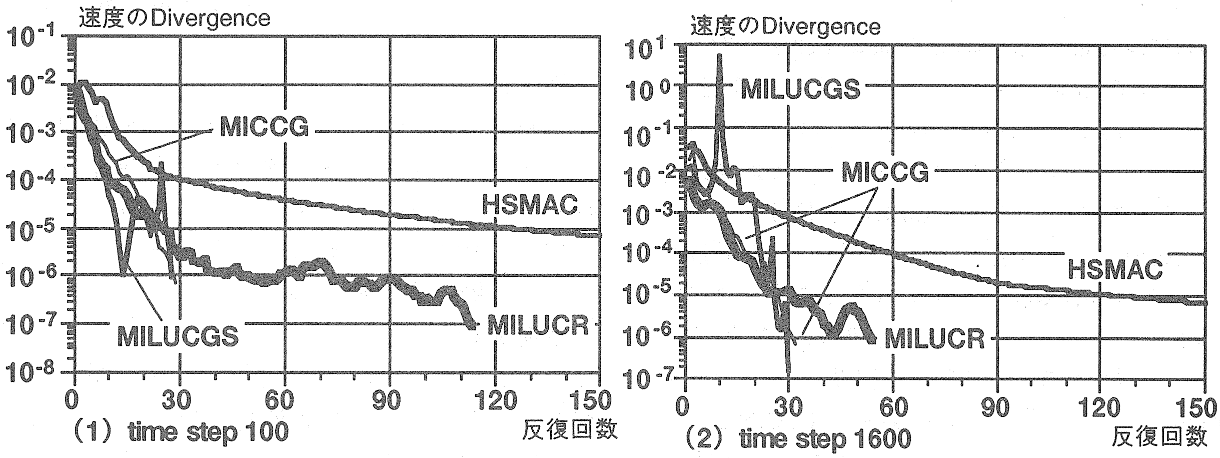


図８　反復回数と速度のDivergence

HSMAC法は、図中には収まらないが約640回を要した。図８はtime stepが100と1600で収束判定基準DMAXが１０$^{-6}$以下になるまでに要した反復回数を示したものである。各解法の収束までの過程は図７のPoisson方程式の相対残差を判定基準とした場合とほぼ同様であるが、速度のDivergenceを基準とした場合、両時刻ともMILUCR法はDMAXが１０$^{-4}$以下になるまでの反復回数は最も少ない。しかしDivergenceが１０$^{-5}$、１０$^{-6}$を基準とした場合、反対にMICCG法やMILUCGS法より多くの反復回数を必要とした。HSMAC法は全ての判定基準で最も多くの反復回数を要した。表２にPoisson方程式の収束判定基準を速度のDivergenceの最大値（DMAX）が１０$^{-4}$、１０$^{-5}$、１０$^{-6}$以下とした時の計算時間（周期的定常状態に到達している無次元時間77.1～231.3までに要した計算時間）の比較を示す。DMAXが１０$^{-4}$で比べるとMILUCR法はMICCG法に比べ

ると１３％高速となった。これはDMAXが１$0^{-4}$以下になるまでの反復回数が最も少ないためである（図８）。DMAXが１$0^{-6}$で反復回数がMICCG法より少ないMILUCGS法がMICCG法より計算時間を要するのは１回の反復に要する計算時間がMILUCGS法の方が長いためである[注7)]（図５、図６）。全体的にDMAXが小さいほどMICCG法に対するHSMAC法の計算速度比が増加し、より多くの計算時間を要する様になる[注7)]。HSMAC法は今回行ったケースにおいては、他の解法より計算時間の比較において最も効率の悪い解法であった[注7)]。

４．結論

(1) HSMAC法と比べ、他の解法は必要とされるPoisson方程式の反復回数が大幅に減少する。

(2) 速度のDivergenceの最大値(DMAX)が１$0^{-4}$の場合はMILUCR法が最も高速となったが、他の場合、MICCG法が最も高速であった。

(3)全ての収束判定基準で、MICCG法は流れ場が変動してもポアソン方程式の反復回数が変化せず安定的な解法であった。

(4)渦放出流れではMICCG法を利用することにより、内部流れの場合[文1)]と比べてより大きな計算時間の短縮が可能となる。すなわち、Poisson方程式の初期残差が大きい非定常解析ではMICCG法はHSMAC法より安定性と収束性に優れた解法である。

注１）MICCG(Modified Incomplete Cholesky CG)法：前処理として不完全Cholesky分解を行った後､共役勾配法のアルゴリズムを適用する算法。前処理はCG法の収束を速めることを目的に行うものである。このICCG法の収束を速めるために、不完全Cholesky分解を行うに当り、行列Ax=b(ここでAはメッシュ分割による係数行列、bは速度のDivergenceにセルの体積を乗じたもの)のAの対角要素に重みづけをすると同時に、第i列以外の要素による対角要素への影響を考慮に入れたものをMICCG法と呼ぶ。文献１でICCG法、ILUCGS法と呼んだ解法は厳密にはMICCG法、MILUCGS法と呼ばれるべきものである。

注２）MILUCGS(Modified Incomplete LU CGS)法：前処理に不完全LU分解を用い、自乗共役勾配法を適用。このILUCGS法の収束を速めるために、MICCG法と同様な工夫をしたものをMILUCGS法と呼ぶ。

注３）MILUCR(Modified Incomplete LU CR)法：前処理に不完全LU分解を用い、共役残差法を適用。MICCG法同様ILUCR法の収束を速めたものをMILUCR法と呼ぶ。

注４）HSMAC法の緩和係数は、1.8。

表２　計算時間の比較

判定基準	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
MICCG法	113.15 (1.00)	166.30 (1.00)	204.87 (1.00)
MILUCGS法	179.40 (1.59)	219.00 (1.32)	248.41 (1.21)
MILUCR法	98.55 (0.87)	289.56 (1.74)	596.37 (2.91)
HSMAC法	163.21 (1.44)	395.01 (2.38)	1121.68 (5.48)

富士通VP2100上のベクトル計算結果測定値[注8)]
上段数字は全CPU時間（秒）
下段( )内数字はMICCGを１とした場合の各算法の速度比を示す

注５）周期的定常状態：解がカルマン渦の放出に伴う２次元的な周期的変動状態に到達した状態。これに到達するまでに約1500stepを要した。全ての表示step数は初期値(0 step)を基準として示している。

注６）相対残差は‖b-Ax‖²/‖b‖²と定義した。‖b‖はベクトルbのノルム。bは圧力修正前の速度のDivergence、b-Axは圧力修正毎の速度のDivergenceとした。HSMAC法と他の解法で同じ評価とした。

注７）文献１で行ったCavity Flow、LESによる室内気流解析も同様の傾向を示している。

注８）ここでは示さぬが富士通VP2100上のスカラー計算結果測定値で比べるとMICCG法とHSMAC法の速度比の傾向は一致するがMILUCGS法、MILUCR法は全ての判定基準でHSMAC法より多くの計算時間を要する結果となった。

謝　辞

本解析にあたり、終始懇切丁寧な御指導を賜りました東京大学生産技術研究所村上研究室村上周三教授を始め、数値シミュレーション手法および解析等に関して懇切丁寧な御指導を賜りました持田灯講師に深く感謝の意を表わします。

参考文献

文１）松井巨光,村上周三,持田灯:"室内気流の非定常解析を対象とした各種行列解法の比較",空気調和・衛生工学会学術講演論文集Ｉ,1993,pp.113-116

文２）日本機械学会:"第947回（流体工学・流体械）講演会第１回CFDワークショップ成果報告集",日本機械学会,988,pp.106-111

文３）Amsden,A.A. and Harlow, F.H :"A Simplified MAC Technique for incompreddible Fluid Flow Calculations",JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 6,1970,pp.322-325

文４）今野雅,鎌田元康,李政宰,倉渕隆,松尾陽:"N-S方程式におけるPoisson方程式の高速解法に関する研究",日本建築学会大会学術講演梗概集,1993,pp.721-722