

## 非線形核関数の近似算定法

関本 恒浩\* 原 基久\*

### 要旨

近年、係留船舶の動揺や構造物の安定性あるいは沿岸におけるバーの形成などに長周期波の影響が重要視され盛んに研究が行われているものの、現地でみられる多方向波浪場における長周期波の検討は十分ではない。ただし、多方向波浪場中の長周期波の挙動は複雑であり、当面は方向スペクトルレベルの検討を行うのが合理的と考えられる。一般に非線形拘束波の方向スペクトルを直接計測することは現在のところ不可能であり、通常波浪成分の方向スペクトルと非線形核関数を用いて、積分することによって非線形拘束波の方向スペクトルを推定するのが実用的と考えられる。しかしながら、非線形核関数は複雑な形をしており、方向スペクトルの計算では多大の労力を必要とする。そこで、本研究では2次長周期波の波数周波数スペクトルの特性を簡単に調べた上で、長波近似を用いて非線形核関数の簡略化を行った。近似された非線形核関数は非常に簡単に表示されるものの厳密解とよく一致することが確認された。

### 1. はじめに

浅海域における長周期波の問題は、係留船舶の動揺や構造物の安定性あるいは漂砂における沿岸でのバーの形成などの海岸工学上の重要な課題として、近年積極的に研究が進められている。一般に長周期波は、波群の移動速度で伝播する拘束波と分散関係式に従ってそれ自身の波速で伝播する自由波が共存していると考えられる<sup>1)</sup>。多方向不規則波浪場においては、現状では自由波と拘束波の両方について詳細に議論するまでには研究は進展していないため、当面は拘束波の方向分散特性について研究を進めるのが妥当であろう。また、多方向波中の拘束波についても、その挙動は複雑であり、時系列特性に対する議論よりはスペクトルレベルでの検討を行うのが合理的と考えられる。しかしながら、一般に非線形拘束波の方向スペクトルを直接計測することは現在のところ不可能と考えられる<sup>2)</sup>。橋本ら<sup>3)</sup>や関本・水口<sup>4)</sup>あるいは関本<sup>2)</sup>によれば、2次の長周期拘束波のスペクトルは、1次のスペクトルと1次波から2次波への非線形的な応答特性を表す非線形核関数（あるいは非線形伝達関数）とによって算定できる。しかし、非線形核関数は複雑な形をしており計算に多大の労力を必要とする。特に2次長周期波の方向分布特性を簡便に求めることを考える場合、非線形核関数の複雑な形が、2次拘束波の特性に対する見通しを悪くする原因となるものと考えられる。したがって、非線形核関数を簡単な関数で近似することは、2次長周期波の方向スペクトルを計算することのみならず、2次長周期波の特性を理解する上で重要と考えられる。そこで、本研究では2次長周期波の波数

周波数スペクトルの特性を簡単に調べた上で、非線形核関数の近似算定式を導き、その精度について検討した。

### 2. 非線形二次長周期波の波数周波数スペクトル

弱非線形・疑似ガウス過程を仮定すればStokes波的な摂動法により2次オーダーまでの水位変動が求められる。この水位変動の相互相関を求め、逆Fourier変換を施すことによって2次オーダーまでの波数周波数スペクトル  $S(\mathbf{k}, \sigma)$  が次式のように求められる。

$$S(\mathbf{k}, \sigma) = S^{(1)}(\mathbf{k}, \sigma) + S^{(2)}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (1)$$

$$S^{(2)}(\mathbf{k}, \sigma) = \int \int_{\mathbf{k}', \sigma'} K(\mathbf{k}', \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma', \sigma - \sigma')^2 \\ \times S^{(1)}(\mathbf{k}', \sigma') S^{(1)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma - \sigma') d\mathbf{k}' d\sigma' \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  は波数ベクトル、 $\sigma, \sigma'$  は角周波数を表す。また、右肩のカッコ付き数字は非線形性の次数であり、式(2)中の  $K(k', k-k', s', s-s')$  は非線形核関数である。非線形核関数は次式で示される。

$$K(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \sigma', \sigma'') = -\frac{g}{2} \left\{ \frac{\sigma' + \sigma''}{\sigma' \sigma''} D \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma' \sigma''} (\mathbf{k}' \mathbf{k}'' - R' R'') - \frac{1}{g} (R' + R'') \right\} \quad (3)$$

ここで、

$$D = \frac{2(\sigma' + \sigma'')(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' - R' R'')}{g(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \tanh(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') h - (\sigma' + \sigma'')^2} \\ + \frac{\sigma''(\mathbf{k}'^2 - R'^2) + \sigma(\mathbf{k}''^2 - R''^2)}{g(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \tanh(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') h - (\sigma' + \sigma'')^2} \quad (4)$$

$$R' = |\mathbf{k}'| \tanh |\mathbf{k}'| h = \frac{\sigma'^2}{g} \quad (5)$$

\* 技術研究所

$$R'' = |\mathbf{k}''| \tanh|\mathbf{k}''| h = \frac{\sigma''^2}{g} \quad (6)$$

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \quad (7)$$

$$\sigma'' = \sigma - \sigma' \quad (8)$$

ただし、 $h$ は水深、 $g$ は重力の加速度である。また、

$$\mathbf{k}(-\sigma) = -\mathbf{k}(\sigma) \quad (9)$$

であり、 $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}'|$  ( $\sigma < \sigma'$ ) のときに長周期成分が現れる。式(7)より1次の波数ベクトルと2次の波数ベクトルの間には次式で示す拘束条件がある。

$$|\mathbf{k}| \cos \theta = |\mathbf{k}'| \cos \theta' + |\mathbf{k}''| \cos \theta'' \quad (10)$$

$$|\mathbf{k}| \sin \theta = |\mathbf{k}'| \sin \theta' + |\mathbf{k}''| \sin \theta'' \quad (11)$$

ここで、 $\theta$ は2次波の、 $\theta', \theta''$ は1次成分波の伝播方向角を表す。

### 3. 非線形核関数の近似算定式

近似算定式を求めるために、まず2次の長周期波の波数周波数スペクトルの性質について若干検討を加える。非線形核関数の性質については、木村<sup>5)</sup>および関本・水口<sup>4)</sup>が詳しく調べているので、詳細についてはこれらを参照されたい。

まず見通しを良くするため、式(2)を変形する。一次波の波数周波数スペクトル  $S^{(1)}(\mathbf{k}, \sigma)$  は

方向スペクトル  $E^{(1)}(\sigma, \theta)$  を用いて、

$$S^{(1)}(\mathbf{k}, \sigma) = \frac{C_g}{|\mathbf{k}|} E^{(1)}(\sigma, \theta) \delta(\sigma - \sigma_k) \quad (12)$$

と表せる。ただし、 $\delta(\sigma - \sigma_k)$  は Dirac のデルタ関数、 $C_g$  は群速度である。また、方向スペクトルは、パワースペクトル  $P^{(1)}(\sigma)$  と方向分布関数  $G(\theta|\sigma)$  を用いて

$$E^{(1)}(\sigma, \theta) = P^{(1)}(\sigma) G(\theta|\sigma) \quad (13)$$

と表せる。したがって、積分変数としての1次波に対する周波数  $\sigma'$  については、

$$P^{(1)}(\sigma') P^{(1)}(\sigma - \sigma') \quad (14)$$

の形の非線形エネルギーが分布することとなる。一般に1次波のパワースペクトルは、 $A, B, m, n$  を定数とすれば、

$$P^{(1)}(\sigma) = A \sigma^{-m} \exp(-B \sigma^{-n}) \quad (15)$$

のような形状をしていることから、今対象としている非線形拘束波の周波数が小さいことを考慮すれば、式(12)より高周波数側ではほぼ-2m乗に比例して非線形エネルギーが減衰することがわかる。すなわち、非線形エネルギーは狭帯域化し、式(2)の積分区間のうち1次波のピーク周波数付近に集中すると考えて良い。したがって、2次の波数周波数スペクトルへの1次波の寄与は、1次波のピーク周波数付近のエネルギーによるものが大きいと考えられる。

また、一次成分波の代表的なスペクトルピーク周

波数は0.06~0.1Hzであり、水深として10m程度を考えれば、相対水深は0.06~0.1程度となり、ある程度の精度で長波近似が適用できるものと考えられる。

つぎに、長周期波を対象として非線形核関数を近似する。最初に式(4)~(5)中の波数ベクトルを波数の絶対値  $k (= |\mathbf{k}|)$  と2つの波数ベクトルの交差角  $\Delta\theta$  で表示するとともに、周波数  $\sigma'$  についても、線形の分散関係式を用いて  $k'$  によって表示する。ついで、 $\tanh$  をべき級数展開し各項の分子・分母別に相対水深  $k'h$  および  $k''h$  の3乗のオーダまでとることによって次式が得られる。

$$K = -\frac{g}{2} \left[ \frac{(k' + k'')^2}{2ghk'k''} \right. \\ \times \{6(1 + 2 \cos \Delta\theta) - h^2(k' + k'')^2(7 - 4 \cos \Delta\theta) \right. \\ \left. - h^2k'k''(6 - 4 \cos \Delta\theta)\} / \{-6(1 - \cos \Delta\theta) \right. \\ \left. + h^2(k' + k'')^2(2 - 5 \cos \Delta\theta) - h^2(2 + 4 \cos^2 \Delta\theta)\} \right] \\ + \frac{6(\cos \Delta\theta - h^2k'k'')}{gh\{6 - h^2(k'^2 + k''^2)\}} \\ \left. - \frac{h^2}{g} \left\{ (k'^2 + k''^2) - \frac{h^2}{3}(k'^4 + k''^4) \right\} \right] \quad (16)$$

ここで、 $k'h \approx k''h \ll 1$  として、各項分子分母の相対水深の2乗の項すなわち  $(k'h)^2$  および  $(k''h)^2$  の項を無視すればよいのであるが、さらに  $\cos \Delta\theta$  の挙動によっては  $(k'h)^2$  あるいは  $(k''h)^2$  の項が有意になるので、それに注意しながら式(16)を吟味する。

式(16)右辺第一項の分子では  $\Delta\theta \approx \pm 2\pi/3$  のとき、分母では  $\Delta\theta \approx 0$  のときにあるいは  $(k'h)^2$  あるいは  $(k''h)^2$  の項が有意となる。ただし、一般的な方向分布関数を考えれば1組の1次波の交差角がの場合には2次波の振幅は小さくなることから、分子の  $\Delta\theta \approx \pm 2\pi/3$  の項は無視して良い。また、第一項の分母を書き換えると、

$$h^2(k' + k'')^2 \left[ -3 + \left\{ \frac{-6}{h^2(k' + k'')^2} + 5 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2k'k''}{(k' + k'')^2} (3 - 2 \cos \Delta\theta) \right\} (1 - \cos \Delta\theta) \right] \quad (17)$$

となるが、 $\Delta\theta \approx 0$  のときは、|| 内は  $1/h^2$  を含む項が有意となることから、上式は

$$h^2(k' + k'')^2 \left[ -3 - \frac{6}{h^2(k' + k'')^2} (1 - \cos \Delta\theta) \right] \quad (18)$$

と書ける。長波近似を用いると、分散関係式は

$$\sigma' = \sqrt{ghk'}, \sigma'' = \sqrt{ghk''} \quad (19)$$

と表せるので、これを用いて周波数を用いた表示に

すると、非線形核関数の近似式として次式が得られる。

$$K = -\frac{1}{2h} \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma'(\sigma' - \sigma)} \frac{g(1 + 2\cos\Delta\theta)}{h\sigma^2 + 2g(1 - \cos\Delta\theta)} + \cos\Delta\theta \right] \quad (20)$$

また、 $\Delta\theta = 0$  のとき、

$$K = \frac{3}{2} \frac{g}{h^2} \frac{1}{\sigma'(\sigma - \sigma')} - \frac{1}{2h} \approx \frac{3}{2} \frac{g}{h^2} \frac{1}{\sigma'(\sigma - \sigma')} \quad (21)$$

となる。式(19)は、Ottesen-Hansen et al.<sup>6)</sup>やOkihiro et al.<sup>7)</sup>が示した单一方向波に対する長波近似式に一致する。

#### 4. 近似式の精度

ここでは、式(20)の精度について検討した。図-1は長波近似した1次成分波の相対水深を0.1としたときの成分波の交差角に対する非線形核関数の分布形状を、2次非線形長周期波に対する相対水深別に調べたものである。なお、この図は交差角で正規化している。また、図中の曲線は厳密解であり、シンボルが近似式を示す。2次長周期波の相対水深（周波数）が大きくなるにつれ、分布形状が広がっている。特に相対水深が小さい場合には、2つの成分波の交差角の狭い範囲に分布が集中しており、同一方向の成分の干渉が強くなることがわかる。近似式は

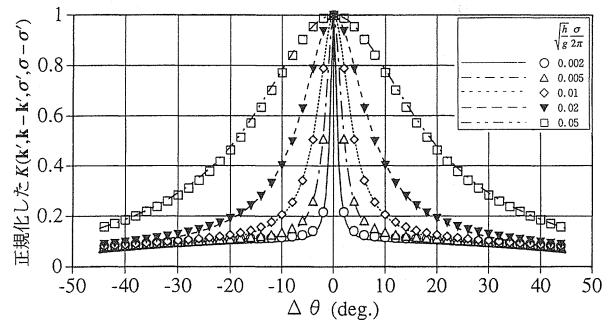
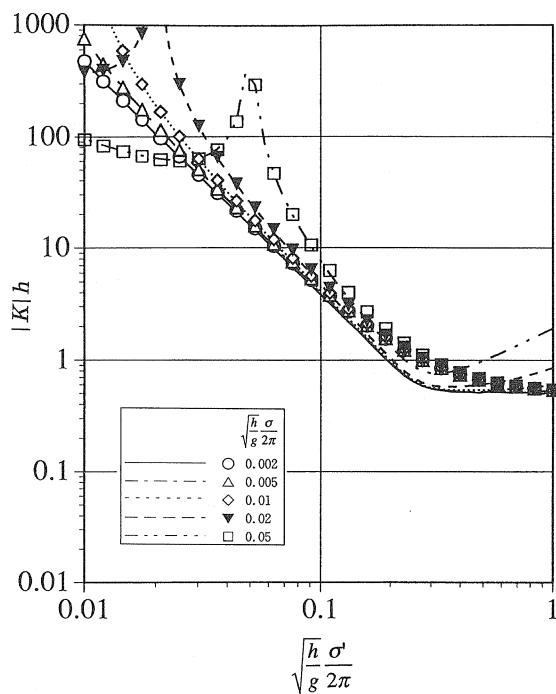


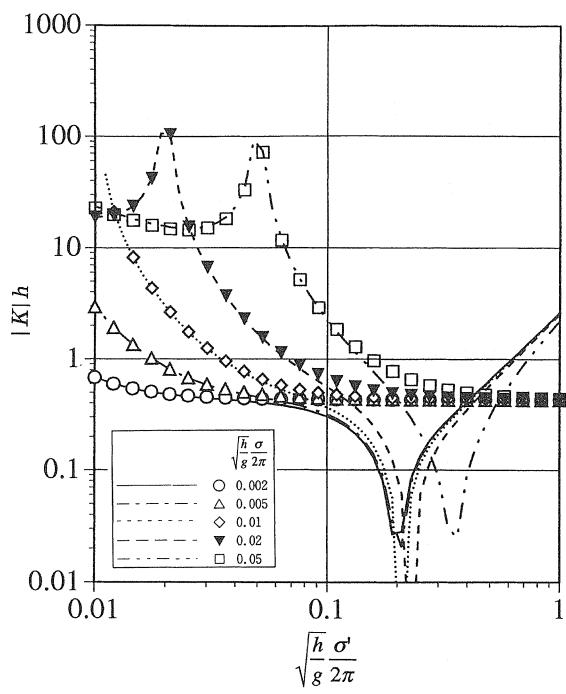
図-1 非線形核関数の厳密値と近似値の比較(その1)

厳密解にはほぼ一致しており、近似精度が比較的高いことが確認できる。

図-2は1次波の相対水深と水深で規格化した非線形核関数の関係を交差角 $\Delta\theta = 0^\circ$ および $30^\circ$ について2次長周期波の相対水深をパラメタに示したものである。ここでも、図中の曲線は厳密解であり、シンボルが近似式を示す。ここでは、非線形核関数を絶対値表示しているがその主要部分は負の値をとっている。したがって、1次波の振幅の大きいところでは長周期波は負となり、いわゆるset-down波となることを意味している。非線形核関数の厳密値と近似計算値を比較すると、近似計算では長波近似を用いているため高周



(1)  $\Delta\theta = 0^\circ$



(2)  $\Delta\theta = 30^\circ$

図-2 非線形核関数の厳密値と近似値の比較(その2)

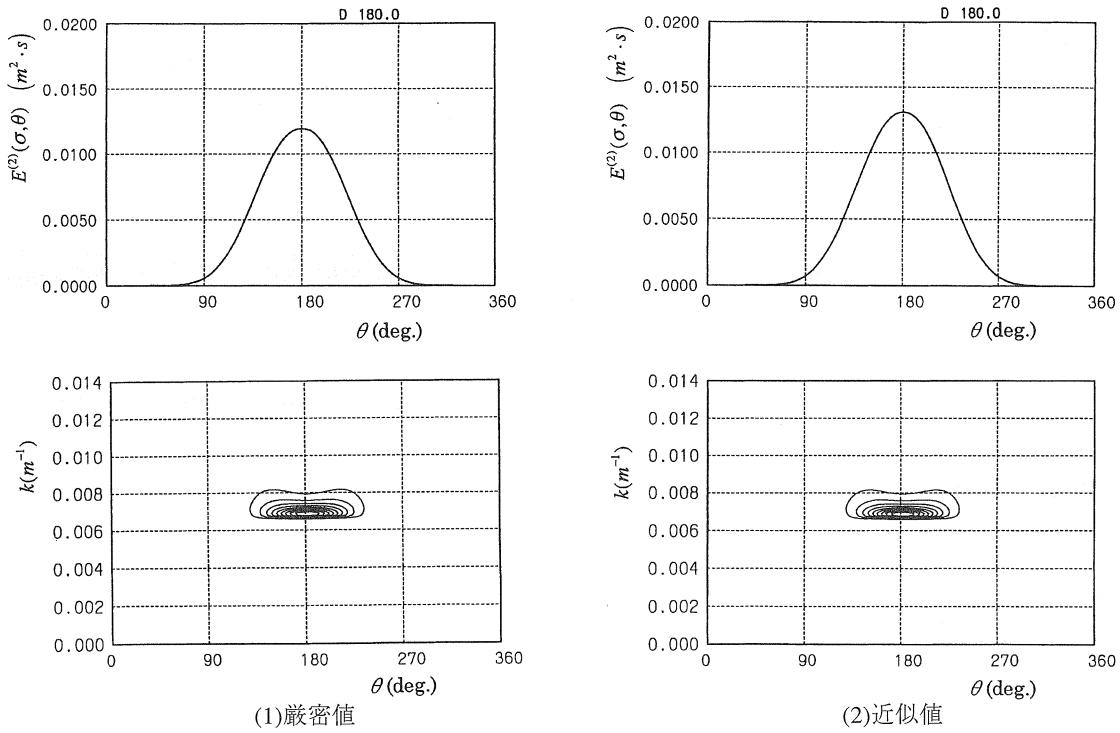


図-3 波数周波数スペクトルの計算結果

波数側の適合度は著しく悪くなっているが、周波数の低い領域では非常に良い近似となっていることがわかる。さらに詳細に見ると、近似値の方が厳密値に比べ全体的に若干大きめとなっているようである。

図-3は式(2)を用いて2次長周期波の無次元周波数をとした場合の波数周波数スペクトルを求め、厳密値と近似計算値を比較したものである。図の下段は波数周波数スペクトルセンターであり、上段は波数周波数スペクトルを波数方向に積分した方向スペクトルをそれぞれ表す。この図の計算に際しては、水深10m、波高1m、周期14sの条件のもとで、パワースペクトルはBreitschneider-光易型スペクトル、1次波の方向分布関数としては方向集中度Smax10の光易型方向分布関数を用いている。図-3より波数周波数スペクトルの分布については、両者に差はほとんど見られないことがわかる。また、方向スペクトルを見ると、近似値の方が厳密値に比べピーク値が1割程度大きくなっているものの、方向分布形状は両者にほとんど差が見られないことがわかる。

##### 5. おわりに

非線形核関数の近似式を求め、近似精度について検討した。その結果近似式は実用的には十分な精度が得られていることを確認した。

##### 参考文献

- 1) 水口優：波群性入射波の碎波帯付近に発生する長周期波について、海岸工学論文集、第41巻、pp.96-100
- 2) 関本恒浩：非線形拘束波の波数周波数スペクトルの推定に関する研究、海岸工学論文集、第43巻、pp.181-185、1996
- 3) 橋本典明・永井紀彦・菅原一晃・浅井正・久高将信：波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について、海岸工学論文集、第39巻、pp.171-175、1992
- 4) 関本恒浩・水口優：非線形2次長周期波の方向スペクトル、海岸工学論文集、第42巻、pp.286-290、1995
- 5) 木村晃：非線形長周期波の2次元スペクトル、第32回海岸工学講演会論文集、pp.154-158、1985
- 6) Ottesen-Hansen, N.-E., S.E. Sand, H. Lundgren, T. Sorensen and H. Gravesen : Correct reproduction of group-induced long waves, Proc. 17th ICCE, pp.784-800, 1980
- 7) Okiihro, M., R.T. Guza and R. J. Seymour : Bound Infragravity waves, J. Geophys. Res., Vol. 97, No.C7, pp.11453-11469, 1992